

مساحت هرم

به نام خدا

تقسیمت اول درسمون درباره نحوه به دست آوردن مساحت هرم هست.

برای مناسبه مساحت هرم فرمول ثابتی وجود نداره، چون شکل قاعده هرمها با هم متفاوته

پس مساحت هرم رو بطوری به دست بیاریم؟ ☹️

باید اول هرم رو به صورت گسترده بکشیم و بعد مساحت قسمت‌های مختلف رو با هم جمع کنیم تا مساحت هرم به دست بیاد.

معمولا سوالهایی که برای به دست آوردن مساحت هرم بهمون میدن به ۲ صورته:

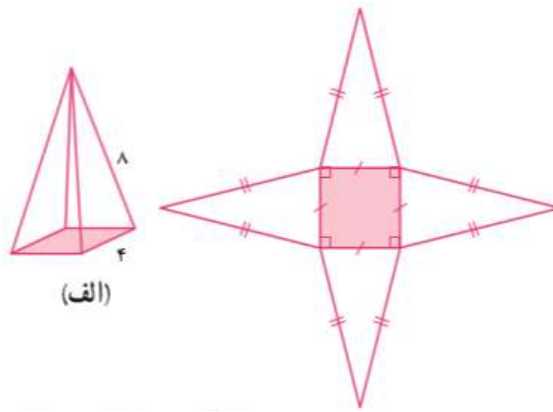
حالت اول: گسترده هرم رو به ما میدن و مساحت رو میفوان

حالت دوم: هرم رو به ما میدن و ما خودمون باید گسترده‌ش رو بکشیم و بعد مساحت رو حساب کنیم.

از هر حالت یه مثال با هم حل می‌کنیم:

مثال:

مساحت هرم زیر را به دست آورید.



خب اینجا خود سوال گسترده هرم رو بهمون دایره و فقط کافیست مساحت قسمت‌های مختلف رو حساب کنیم و با هم جمع کنیم.

گسترده این هرم از چه قسمت‌هایی تشکیل شده؟

یه مربع که قاعده هرمه و چهار تا مثلث متساوی‌الساقین هم اندازه که وجه‌های جانبی هرم هستن

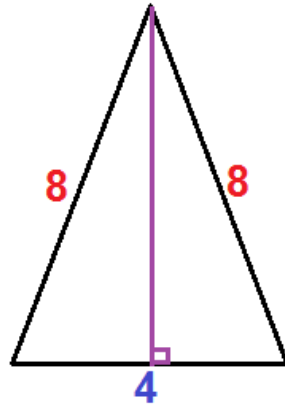
مساحت مربع بطوری به دست میاد؟

$$\text{مساحت مربع} = 4 \times 4 = 16$$

مساحت مثلث بطوری به دست میاد؟

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2}$$

پس ما نیاز داریم که قاعده و ارتفاع مثلث رو داشته باشیم. یکی از مثلث‌ها رو برداریم می‌کشیم تا بتونیم قاعده و ارتفاع مشخص کنیم:



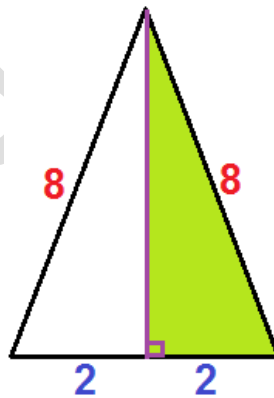
قاعده مثلث برابر ۴ هست ولی ارتفاع (خط بنفش) رو نداریم و باید خودمون مناسبه کنیم. بطوری؟ با استفاده از قضیه فیثاغورس

قبل از اینکه بریم سراغ قضیه فیثاغورس، به یه نکته توجه کنید:

در مثلث متساوی الساقین، ارتفاع مثلث، قاعده رو به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کنه

بنابراین در اینجا هم، ارتفاع میاد و ضلع مقابل رو نصف می‌کنه. پس اندازه‌ها به

صورت زیر همیشه:



حالا مثلث سبز رنگ رو در نظر می‌گیریم. یه مثلث قائم الزاویه‌س که اندازه دو تا ضلعش رو داریم، پس برای به دست آوردن ضلع سوم از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\text{وتر}^2 = \text{ضلع دیگر}^2 + \text{ضلع یک}^2$$

$$8^2 = h^2 + 2^2$$

$$64 = h^2 + 4$$

$$h^2 = 60$$

$$h = \sqrt{60} = \sqrt{4 \times 15} = 2\sqrt{15}$$

حالا قاعده و ارتفاع مثلث رو داریم:

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \frac{4 \times 2\sqrt{15}}{2} = 4\sqrt{15}$$

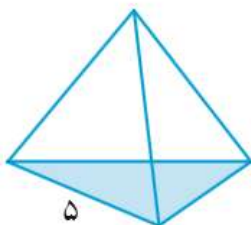
مساحت کل هرم از مساحت مربع (قاعده هرم) و ۴ تا مثلث متساوی الساقین هم اندازه تشکیل شده. پس مساحت کل هرم برابر با:

$$\text{مساحت کل} = 16 + 4(4\sqrt{15})$$

توجه داشته باشید که در اینجا مساحت کل هرم رو از ما فواسته بودن، آگه توی سوالی از ما فواستن که مساحت جانبی رو به دست بیاریم، دیگه نیاز نیست که مساحت قاعده هرم رو حساب کنیم. فقط کافیه مساحت وجه‌های جانبی رو حساب کنیم و با هم جمع کنیم.

مثال دو:

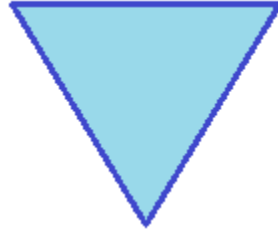
با توجه به اندازه‌های داده شده، گسترده هرم را رسم کنید و مساحت کل آن را به دست آورید.



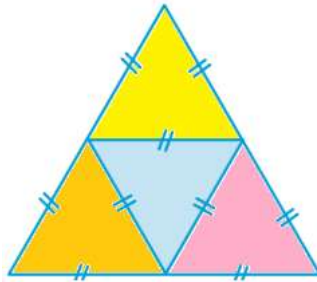
فب در اینجا گسترده هرم به ما داده نشده، پس اولین گامی که باید انجام بدیم اینه که گسترده هرم رو رسم کنیم.

گسترده هرم رو پطوری رسم کنیم؟ خیلی ساده 😊

اول قاعده هرم رو می کشیم (در اینجا قاعده هرم به مثلث متساوی الاضلاع)



فب این مثلث سه تا ضلع داره و آله هرم رو باز کنیم (گسترده کنیم) روی هر کدوم از این اضلاع یه مثلث کشیده میشه. به صورت زیر:



هر کدوم از این مثلثهای رنگی یکی از وجه های هرم هستن.

فب مرحله اول انجام شد و گسترده هرم به دست اومد. حالا باید مساحت این شکل رو به دست بیاریم.

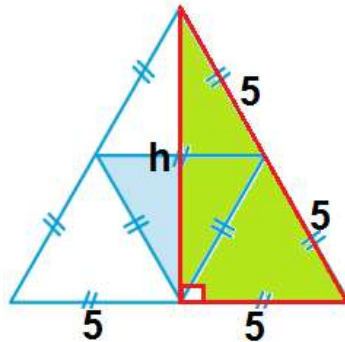
مساحت این شکل رو از دو طریق می تونیم به دست بیاریم:

۱. مساحت یکی از مثلثهای رنگی رو حساب کنیم و بعد در ۴ ضرب کنیم (چون ۴ تا مثلث هم اندازه هستن)

۲. کل شکل رو به عنوان یه مثلث بزرگ در نظر بگیریم و مساحتش رو به دست بیاریم.

در اینجا ما از راه دوم استفاده می کنیم.

برای به دست آوردن مساحت مثلث بزرگ نیاز داریم که اندازه قاعده و ارتفاعش رو داشته باشیم. ارتفاع رو رسم می‌کنیم؛



فب همینطوری که در شکل می‌بینیم، قاعده مثلث برابر با $5+5 = 10$ اما ارتفاع رو نداریم و باید مشابه کاری که در مثال قبل انجام دادیم، فو دمون ارتفاع رو به دست بیاریم.

مثلثی که با رنگ سبز مشخص شده یک مثلث قائم‌الزاویه‌س که اندازه دو تا از ضلع‌هاش رو داریم، پس می‌تونیم از رابطه فیثاغورس استفاده کنیم و h رو به دست بیاریم؛

$$\text{وتر}^2 = \text{ضلع دیگر}^2 + \text{ضلع یک}^2$$

$$10^2 = h^2 + 5^2$$

$$100 = h^2 + 25$$

$$h^2 = 75$$

$$h = \sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = 5\sqrt{3}$$

حالا قاعده و ارتفاع مثلث رو داریم؛

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2} = \frac{10 \times 5\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}$$

با توجه به مثالهایی که حل کردیم برای حل سوالهایی که در این فصل داریم می‌تونیم از مطالب زیر استفاده کنیم:

۱. برای کشیدن گسترده یک هرم، ابتدا قاعده‌ی هرم رو رسم می‌کنیم و بعد روی هر ضلع از قاعده، یک مثلث رسم می‌کنیم (در این مرحله اندازه هر کدوم از اضلاع رو هم مشخص می‌کنیم)

۲. وقتی که می‌فوایم مسامت مثلث رو به دست بیاریم به قاعده و ارتفاع احتیاج داریم، ارتفاع رو باید از رابطه فیثاغورس به دست بیاریم.

توجه: در مثلثهای متساوی‌الساقین (و متساوی‌الاضلاع)، قاعده مثلث، ضلع مقابل یعنی قاعده‌ی مثلث رو به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کنه

۳. آگه از ما مسامت کل رو خواسته بودن، باید مسامت قاعده و مسامت وجه‌های جانبی رو به دست بیاریم و با هم جمع کنیم. ولی اگر فقط مسامت جانبی هرم رو خواسته بودن فقط باید مسامت وجه‌های جانبی رو با هم جمع کنیم.

سطح و حجم:

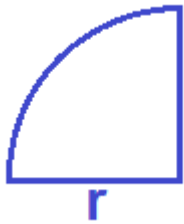
در این قسمت می‌فوایم ببینیم آگه به صفحه رو دوران بدیم چه حجم هندسی به وجود میاد. مثالهای زیر رو ببینیم:

در هر مورد مشخص کنید که در صورت دوران شکل مورد نظر، چه حجم هندسی به وجود می‌آید؟



با دوران این مثلث قائم‌الزاویه حول محور h ، یک مخروط به ارتفاع h و شعاع قاعده‌ی a به وجود می‌آید.

برای درک بهتر می‌تونید یک کاغذ رو به این شکل برش بدید و حول محور h دوران بدید.



اگه یک ربع دایره به شعاع r ، و حول شعاعش دوران بدیم یه نیم‌کره به شعاع r ساخته میشه.

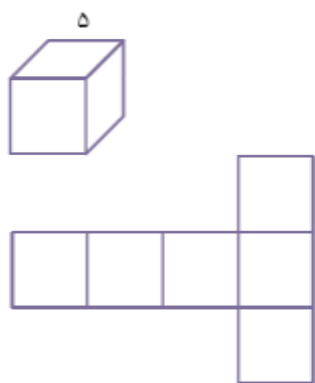


اگر یک مستطیل به ابعاد فوق رو حول محور Y دوران بدهیم، به استوانه به ارتفاع Y و شعاع قاعده X ساخته میشه.

خب قبل از اینکه تمرین حل کنیم یکی دو تا مطلب کوتاه رو با هم بینیم:

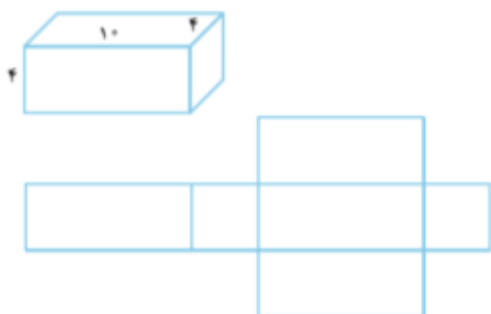
گسترده مکعب و مکعب مستطیل به شکل زیر هست:

مکعب:



پس برای مناسبه مساحت یک مکعب، باید مساحت 6 تا مربع رو با هم جمع کنیم (یا مساحت یک مربع رو پیدا کنیم و در 6 ضرب کنیم)

مکعب مستطیل:



برای مناسبه مساحت مکعب مستطیل، باید مساحت 6 تا مستطیل رو مناسبه کرده و با هم جمع کنیم.

و آفرین مطلب:

آله یه کره داشته باشیم و این کره بایه صفحه به صورت زیر بریده شده باشه ، سطح بریده شده به شکل دایره‌س. به این سطح بریده شده سطح مقطع هم گفته میشه:



حل تمرین صفحه ۱۴۳

سطح و حجم

۱- حجم و سطح کل شکل های زیر را پیدا و باهم مقایسه کنید.

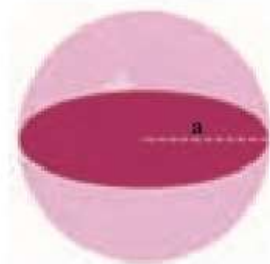
مکعب به ضلع a



V=

S=

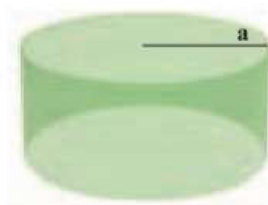
کره به شعاع a



V=

S=

استوانه به ارتفاع و شعاع قاعده a



V=

S=

استوانه به ارتفاع و قطر قاعده a



V=

S=

در هر مورد، نسبت حجم به سطح ($\frac{V}{S}$) را به دست آورید. در کدام شکل این نسبت بزرگ تر است؟

مکعب به ضلع a :

$$v = a^3$$

$$s = 6a^2$$

بنابراین نسبت حجم به سطح برابر است با:

$$\frac{v}{s} = \frac{a^3}{6a^2} = \frac{a}{6}$$

کره به شعاع a :

$$v = \frac{4}{3}\pi a^3$$

$$s = 4\pi a^2$$

بنابراین نسبت حجم به سطح برابر است با:

$$\frac{v}{s} = \frac{\frac{4}{3}\pi a^3}{4\pi a^2} = \frac{a}{3}$$

استوانه به ارتفاع و شعاع قاعده a :

$$v = \pi r^2 h = \pi a^2 \times a = \pi a^3$$

مساحت کل استوانه برابر با مساحت جانبی + مساحت دو قاعده

مساحت جانبی در واقع مساحت یه مستطیله که:

عرضش برابر با ارتفاع استوانه یعنی a و

طولش برابر با محیط دایره س یعنی $2\pi a$

پس مساحت جانبی برابر با:

$$\text{مساحت جانبی} = a \times 2\pi a = 2\pi a^2$$

حالا مساحت قاعده رو به دست میاریم، قاعده یه دایره به شعاع a هست بنابراین:

$$\text{مساحت قاعده} = \pi a^2$$

دو تا قاعده برابر داریم پس مساحت قاعده دوم هم برابر πa^2 هست.

با این توضیحات مساحت کل شکل برابر با:

$$s = 2\pi a^2 + \pi a^2 + \pi a^2 = 4\pi a^2$$

بنابراین نسبت حجم به سطح برابر است با:

$$\frac{v}{s} = \frac{\pi a^3}{4\pi a^2} = \frac{a}{4}$$

استوانه به ارتفاع و قطر قاعده a :

قطر قاعده برابر a هست پس شعاع قاعده برابر $\frac{a}{2}$ میشه.

$$v = \pi r^2 h = \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 \times a = \frac{\pi a^3}{4}$$

مساحت کل استوانه برابر با مساحت جانبی + مساحت دو قاعده

مساحت جانبی در واقع مساحت یه مستطیله که:

عرضش برابر با ارتفاع استوانه یعنی a و

طولش برابر با محیط دایره $s = 2\pi \frac{a}{2} = \pi a$ یعنی

پس مساحت جانبی برابر با:

$$\text{مساحت جانبی} = a \times \pi a = \pi a^2$$

حالا مساحت قاعده رو به دست میاریم، قاعده یه دایره به شعاع $\frac{a}{2}$ هست بنابراین:

$$\text{مساحت قاعده} = \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{4}$$

دو تا قاعده برابر داریم پس مساحت قاعده دو هم برابر $\frac{\pi a^2}{4}$ هست.

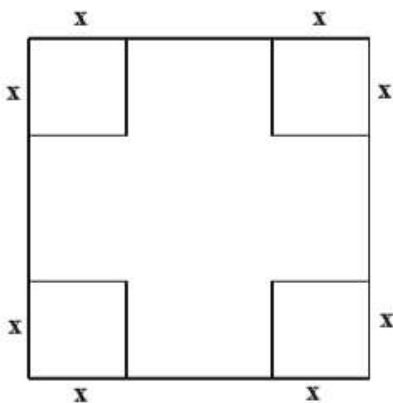
با این توضیحات مساحت کل شکل برابر با:

$$s = \pi a^2 + \frac{\pi a^2}{4} + \frac{\pi a^2}{4} = \frac{6\pi a^2}{4} = \frac{3\pi a^2}{2}$$

بنابراین نسبت حجم به سطح برابر است با:

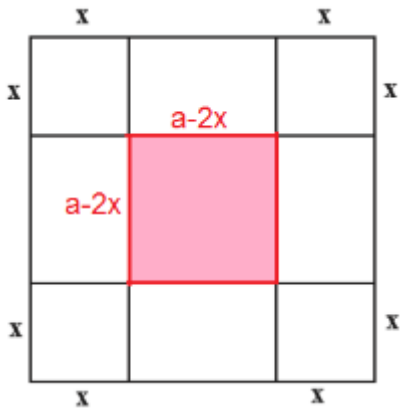
$$\frac{v}{s} = \frac{\frac{\pi a^3}{4}}{\frac{3\pi a^2}{2}} = \frac{a}{6}$$

نسبت حجم به مساحت کره از بقیه بزرگتره.

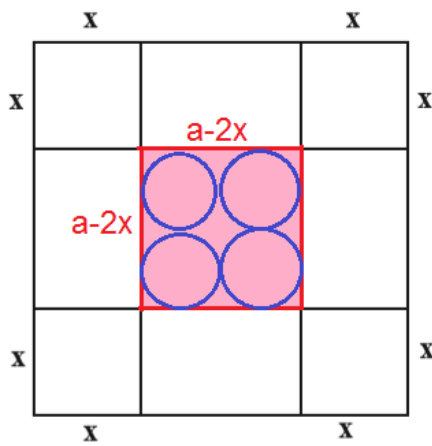


۲- از یک مقوا به ضلع a گوشه‌های مربع شکل به ضلع x را بریده و با سطح باقیمانده یک جعبه مکعب مستطیل شکل درست کرده‌ایم. چه رابطه‌ای باید بین a و x باشد تا بتوان چهار کره را به شعاع x داخل این جعبه جای داد به طوری که هر کره به کره مجاورش و به دیواره جعبه مماس باشد؟

کف جعبه‌ای که ساخته میشه، مربعی به شکل زیره:



حالا میفوییم به صورت زیر ۴ تا کره داخل این جعبه قرار بدیم:



شعاع هر کره برابر x هست.

از طرفی در هر ضلع مربع دو تا کره قرار داریم

یعنی هر ضلع مربع ۴ برابر شعاع کره‌س.

پس داریم:

$$a - 2x = 4x \rightarrow a = 6x$$

آموزش گام به گام ریاضی چهارم تا دهم در سایت:

www.riazibaham.ir

و کانال‌های [@RiaziBaHam](https://www.instagram.com/RiaziBaHam) و [@RiaziBaHam9](https://www.instagram.com/RiaziBaHam9)

برای دریافت جزوات سایر پایه‌ها، تمرینهای حل شده و نمونه سوالات

امتثانی حل شده، به "ریاضی با هم" پیوندید.